

257. Fandiño Pinilla M. I. (2015). Difficoltà nell'apprendimento della matematica. In: Salvucci L. (editor) (2015). *Strumenti per la didattica della matematica. Ricerche, esperienze, buone pratiche*. Milano: Franco Angeli. 112-123. ISBN: 978-88-204-2024-6.

6. Difficoltà nell'apprendimento della Matematica¹

di Martha Isabel Fandiño Pinilla²

6.1. La teoria degli ostacoli

Una vera e propria *teoria degli ostacoli* che si frappongono all'apprendimento della matematica fu proposta una prima volta da Guy Brousseau nel 1976 e sistemata in modo definitivo negli anni successivi.



Guy Brousseau, medaglia Felix Klein 2003

¹ Tratto da: D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008), *La didattica e le difficoltà in matematica*, Erickson, Trento.

²NDR - Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

Nello stesso processo di insegnamento-apprendimento, da una parte è bene che si formino idee transitorie, ma dall'altro bisogna fare i conti con il fatto che tali idee resisteranno (tenteranno di resistere) poi al tentativo di superarle.

Le rotture sono necessarie. Ma vi sono allora dei fenomeni evidenti di resistenza all'apprendimento, che occorre esaminare, gli *ostacoli*.

Si usa dire che un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

Tuttavia questa "definizione", se ben si adatta ad alcune tipologie di ostacoli, non calza a pennello ad altri; molto più semplicemente, allora, si potrebbe dire che ostacolo è sinonimo di qualche cosa che si frappone all'apprendimento trasmissivo insegnante-allievo atteso, qualunque ne sia la natura. Prima di procedere, un esempio.

Nell'insieme N dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...), ogni elemento generico n ha un ben determinato successivo $n+1$; questo concetto viene conquistato in maniera implicita e naturale, senza bisogno di insegnamenti espliciti, fin dalla più tenera età; è implicito nella conta dei numeri naturali che i bambini costruiscono in modo quasi automatico fra i 2 ed i 4 anni. Ma l'oggetto matematico *successivo di un numero* dato viene reso esplicito e reso oggetto di apprendimento nella scuola primaria, attorno ai 6 anni di età, e facilmente costruito. Esso si forma, diventa conoscenza corretta e spendibile in aula; ma assume spesso la forma seguente: *ogni* numero (di non importa qual insieme numerico) ha un successivo.

Quando si giunge a Q (insieme dei razionali), il che capita più o meno in terza primaria quando si incontrano le prime frazioni o i primi numeri scritti nella forma con la virgola, l'idea di successivo persiste, è una conoscenza precedente che ha avuto successo, ma qui invece dovrebbe perdere di significato. Infatti: non esiste il successivo di $\frac{3}{4}$ e non $\frac{4}{5}$ è come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{5}$ vi sono altre infinite frazioni, per esempio $\frac{35}{50}$. Così: non esiste il successivo di 1,4 e non è certo 1,5 come si sente dire o come si legge perfino su certi libri di testo, perché tra 1,4 e 1,5 ci sono altri infiniti numeri, per esempio 1,42 o anche 1,436 eccetera.

Nella necessità didattica di superare tali ostacoli, si dovrebbero studiare occasioni didattiche strutturate appositamente per fornire agli allievi prove della necessità di modificare le loro concezioni.

Come abbiamo già detto, questa idea di Brousseau ha visto la luce attorno alla metà degli anni '70; egli fornisce (in quei primi lavori di ricerca ed in successivi) alcune caratteristiche degli ostacoli:

- bisogna sempre tener presente che, in generale, un ostacolo non è una mancanza di conoscenza, ma una conoscenza;
- l'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;
- se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori dal contesto noto, già incontrato, fallisce, generando risposte scorrette; ci si accorge allora che si necessita di punti di vista diversi;
- l'ostacolo produce contraddizioni, ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita, che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che questo punto venga reso esplicito e che lo studente se ne renda conto;
- anche una volta superato, in modo sporadico l'ostacolo riappare lungo il corso del percorso cognitivo dell'allievo.

Come abbiamo già detto, però, questa caratterizzazione degli ostacoli non sempre si adatta a qualsiasi loro tipologia, quindi bisogna guardarla ed accettarla in modo critico.

Si usa distinguere in didattica della matematica tre tipi di ostacoli:

di natura ontogenetica;

di natura didattica;

di natura epistemologica.

6.2. Ostacoli ontogenetici

Ogni soggetto che apprende sviluppa capacità e conoscenze adatte alla sua età mentale (che può essere diversa dall'età cronologica), dunque adatte a mezzi e scopi di quella età: rispetto alla costruzione di certi concetti, cioè all'appropriazione di certi oggetti matematici, queste capacità e conoscenze possono essere insufficienti e possono costituire quindi *ostacoli di natura ontogenetica*. Per esempio, l'allievo potrebbe avere limitazioni neurofisiologiche anche solo dovute alla sua età cronologica. In realtà, si potrebbero categorizzare meglio gli ostacoli, con una ripartizione più fine.

Ostacoli genetici sono quelli legati al corredo cromosomico di un individuo, quello che fornisce a ciascuno vari comportamenti innati; questi comportamenti possono essere causa di ostacoli, a volte anche insuperabili; gli esempi sono numerosissimi e comprendono funzioni primarie, come gli istinti (per esempio l'istinto di sopravvivenza) e funzioni superiori, come la predisposizione alla comprensione ed all'uso della lingua materna; o problemi legati a deficit sensoriali; o altro.

Ostacoli ontogenetici propriamente detti sono più legati allo sviluppo dell'intelligenza, dei sensi e dei sistemi percettivi. Messe a parte le patologie, che qui non discutiamo, gli ostacoli in questo campo sono legati all'evoluzione individuale; se per esempio l'ostacolo è legato alla maturazione psichica individuale, allora tale ostacolo verrà rimosso dal superamento di quella fase, anche solo per motivi cronologici. Tale tipo di ostacoli può essere anche di durata limitata nel tempo. In questo tipo di ostacoli, la ricerca in didattica della matematica può fare poco; altri sono i settori di studio che si sono dedicati a questa vasta problematica; noi qui la trascuriamo per mancanza di specificità.

6.3. Ostacoli didattici

Ogni docente sceglie un progetto, un curriculum, una metodologia, interpreta in modo personale la trasposizione didattica, secondo le sue convinzioni sia scientifiche sia didattiche; egli crede in quella scelta e la propone alla classe perché la pensa efficace; ma quel che è efficace effettivamente per qualche studente, non è detto che lo sia per altri. Per questi *altri*, la scelta di *quel* progetto si rivela un *ostacolo didattico*.

Sapere accademico



TRASPOSIZIONE DIDATTICA

Sapere da insegnare



INGEGNERIA DIDATTICA

Sapere insegnato

La scelta del contenuto rientra nella trasposizione didattica, la scelta della metodologia rientra nell'ingegneria. Sia l'una scelta che l'altra, sono

scelte compiute dal docente, in base alle proprie convinzioni. Sia l'una che l'altra possono non essere efficaci per tutti gli studenti e rivelarsi fallimentari per alcuni.

Per esempio, per motivi legati al fatto che la scuola dell'obbligo finiva piuttosto presto, un po' in tutto il mondo si è deciso, molti anni fa, di insegnare i numeri razionali, nella loro forma di scrittura con la virgola, fin dalla scuola primaria, ed in un momento in cui il bambino sta ancora assimilando (e con grande sforzo) idee relative ai numeri naturali. Ciò comporta che, nella concezione del bambino, non ci sia una vera e propria possibilità di assimilare con successo i numeri espressi nella forma decimale; egli finisce con l'accomodarli insieme ai naturali in un unico modello generale di numero.

Grazie alla ricerca, sappiamo oggi che, per i bambini della primaria, i numeri decimali sono dei "naturali con la virgola", come ha dimostrato lo stesso Brousseau. Oggi si sa che questa concezione è assai radicata e persiste talvolta fino all'università; essa costituisce un ostacolo didattico piuttosto diffuso alla comprensione dei numeri reali.

Nello stesso senso, i numeri interi (cosiddetti relativi, cioè dotati di segno) sono interpretati né più né meno che come "numeri naturali relativi", cioè numeri naturali dotati di segni; uno studio del campo concettuale dei cosiddetti numeri naturali relativi si trova in González Marí (1995).

Un altro esempio: l'attività di misura dei segmenti e le usuali considerazioni a questo proposito sono state evidenziate come ostacoli didattici alla comprensione dell'equipotenza di segmenti considerati come insiemi di punti; così pure la scelta del docente di scuola primaria di far diventare modello (stabile) l'immagine (instabile) del segmento come filo di perle (i punti), si rivela ostacolo didattico al momento dell'introduzione della densità in Q e ancora più (quasi insormontabile) della continuità in R (Arrigo, D'Amore, 1999).

6.4. Ostacoli epistemologici

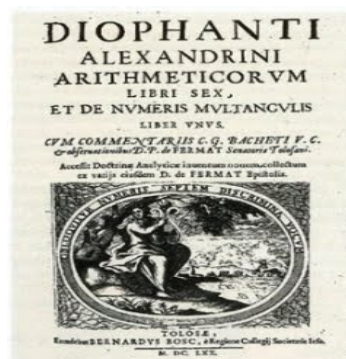
Ogni argomento a carattere matematico ha un suo proprio statuto epistemologico che dipende dalla storia della sua creazione da parte di un individuo, dalla sua evoluzione all'interno della comunità matematica, dalla sua accettazione critica nell'ambito della matematica, dalle riserve che gli sono proprie, dal linguaggio in cui è espresso o che richiede per potersi esprimere. Ciò comporta che vi siano oggetti della matematica la cui natura è tale da costituire ostacolo non solo nell'apprendimento ma anche, e prima ancora, nella sua accettazione nella comunità scientifica. Questo fatto è in-

teressante perché permette di conoscere a priori quali, dei concetti matematici che si desiderano far costruire ai propri allievi nel corso di un percorso didattico, costituiranno ostacoli epistemologici all'apprendimento. Detto in modo più esplicito: quando nella storia dell'evoluzione di un concetto si individua una non continuità, una frattura, cambi radicali di concezione, allora si suppone che quel concetto abbia al suo interno *ostacoli di carattere epistemologico* sia ad essere concepito, sia ad essere accettato dalla comunità dei matematici, sia ad essere appreso. Quest'ultimo punto si manifesta, per esempio, in errori ricorrenti e tipici di vari studenti, in diverse classi, stabili negli anni.

Abbiamo al giorno d'oggi moltissimi esempi di ostacoli epistemologici; per esempio quelli studiati da Cornu e Sierpinska [sull'apprendimento del concetto di limite; su questo si veda anche Bagni] e molti altri in svariati campi. Un altro bell'esempio è costituito dallo studio specifico sul valor assoluto (Douroux; Gagatsis, Thomaidis).

Un altro successo nell'applicazione della teoria degli ostacoli epistemologici è stato ottenuto per quanto concerne i numeri interi relativi (Glaeser). In questa ricerca Glaeser mette molto dettagliatamente in evidenza una lista di ostacoli epistemologici scovati grazie ad un'analisi storica del concetto di numeri interi relativi. Molto interessante il fatto che egli trovi una stretta relazione tra gli ostacoli riscontrati negli studenti e le difficoltà incontrate da grandi matematici nel passato, proprio nel trattare di questo argomento: Diofanto, Stevin, Descartes, McLaurin, Euler, d'Alambert, Carnot, Laplace, Cauchy ed Hankel (che, in realtà, supera tutti gli ostacoli noti, proponendo una sistemazione fondatale basata sulle classi di equivalenza).

Copertina di una delle opere più famose di Diofanto di Alessandria (200/214 - 284/298)





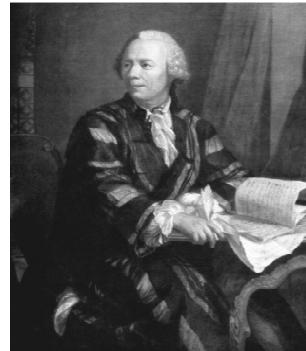
Simone Stevin (1548 – 1620)



René Descartes (1596 – 1650)



Colin Mc Laurin (1698 – 1746)



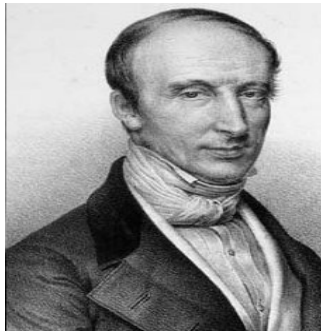
Leonhard Euler (1707 – 1783)



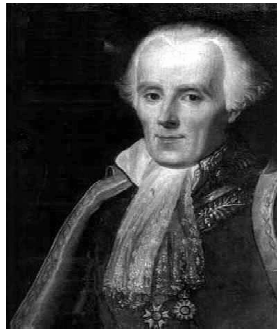
*Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert
(1717 – 1783)*



*Lazare Nicolas Carnot
(1753 – 1823)*



Pierre Simon de Laplace
(1789 – 1857)



Augustin Cauchy
(1749 - 1827)



Hermann Hankel (1839 – 1873)

Altri esempi in questo settore sono relativi a vari ostacoli epistemologici: il postulato di Archimede (Spagnolo, Margolinas, 1993); il concetto di numero immaginario (Bagni, 1997); lo “scivolamento” tra i verbi avere ed essere nel corso di una dimostrazione (Duval, 1983); l’inaccettazione della dimostrazione di un teorema che coinvolge l’infinito attuale ha come causa un’altra forma di “scivolamento” (tra aritmetica e geometria) (Arrigo, D’Amore, 1999); eccetera.

Riassumendo:

l’ostacolo ontogenetico è legato allo studente ed alla sua natura (da tanti punti di vista) non solo in modo stabile, ma anche occasionale;

quello didattico alla scelta strategica del docente;

quello epistemologico alla natura stessa dell’argomento.

Un esempio illuminante.

In terza primaria l'insegnante ha da poco affrontato l'algoritmo della sottrazione con il riporto o prestito. Per compiere una verifica generale, assegna alla classe 5 operazioni di sottrazione da eseguire in colonna:

$$68-24 = \quad 53-27 = \quad 45-22 =$$

$$43-27 = \quad 79-66 =$$

Uno studente esegue in colonna:

68-	53-	45-	43-	79-
24=	27=	22=	27=	66=
-----	-----	-----	-----	-----
44	34	23	24	13

Ad una prima occhiata frettolosa, l'insegnante si limita a dire all'allievo che ha fatto bene 3 volte su 5; poi aggiunge: «Devi stare più attento con i riporti»; ma nota lo sguardo del bambino che mostra di non capire questa indicazione. Una successiva analisi più fine, condotta anche coinvolgendo il bambino, mostra che la regola che questi aveva compreso ed applicato con successo nelle precedenti sottrazioni in colonna era: In una sottrazione in colonna parti sempre da destra, dalle unità, e sottrai il numero più piccolo dal più grande; poi passa alle decine e fai altrettanto.

Questa regola aveva funzionato bene fino ad allora e l'allievo aveva dunque optato per generalizzarla, evitando quell'inutile discorso così complicato che non aveva fatto proprio relativo ai prestiti. Peccato che, questa regola, ben appresa, perfettamente funzionante, ora avesse smesso di funzionare ... L'errore non è dunque del tutto frutto di ignoranza ma, anzi, al contrario, è il tentativo di generalizzare e prostrarre una conoscenza che aveva funzionato, a tutti i casi nuovi.

Da questo punto di vista, una raccolta di possibili errori matematici potrebbe avere grande interesse [ovviamente non si prendono in esame gli errori di scarso interesse epistemologico, come l'errore involontario, il rifiuto, l'errore di distrazione, l'applicazione di regole inesistenti (che sono comunque un interessante segnale di misconcezioni) eccetera].

È importante notare che, mentre per Bachelard l'ostacolo epistemologico ha sede nel pensiero stesso, per Brousseau esso risiede nella comunicazione. Visti gli esempi fatti fino ad ora, vogliamo ancora notare quanto sia efficace associare la ricerca sugli ostacoli epistemologici ad una competenza nella storia del pensiero matematico.

In Douroux si trova anche un elenco di condizioni cui devono soddisfare gli ostacoli per poter essere detti epistemologici, che è sostanzialmente quella precedente; inoltre, sempre nell'ambito del gruppo di ricerca di Bor-

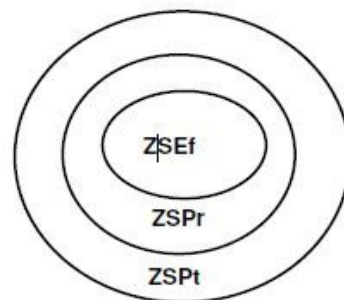
deaux, si sono messe a punto caratteristiche per poter individuare un ostacolo che sono, in breve, le seguenti:

- si ha un ostacolo quando nell'analisi storica di un'idea, si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non continuità nell'evoluzione storico - critica dell'idea stessa;
- si ha un ostacolo quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini.
- La ricerca degli ostacoli va allora fatta contemporaneamente, e questo legame ha del sensazionale perché dà al ruolo della prassi didattica lo stesso peso, la stessa fondamentale importanza che ha la ricerca storico-epistemologico-critica in matematica:
- a scuola, nella pratica didattica;
- nello studio della storia della matematica, coniugando l'una ricerca con l'altra.

6.5. Lo studente come ricercatore

Non sarà inutile sottolineare, che, sulla base di quanto fin qui affermato, non si scorge nessuna rilevante differenza tra il lavoro dello scienziato che, basandosi sulle proprie conoscenze, avanza sulla strada della scienza, percorrendo nuove vie e dunque, fatalmente, commettendo degli errori che si riveleranno poi produttivi nella conquista del sapere;

ZSEf: zona di sviluppo effettivo
ZSPr: zona di sviluppo prossimale
ZSPt: zona di sviluppo potenziale



il lavoro dello studente che, basandosi sulle proprie conoscenze, nella zona di sviluppo effettivo, avanza nella strada della conoscenza, nella zona di sviluppo prossimale e dunque, fatalmente, commettendo quegli errori attesi

dal docente, quelli correggendo i quali, si creeranno immagini più potenti del concetto in gioco, verso la creazione di un modello corretto, stabile, seguendo la terminologia di Vygotskij.

Spesso si dice che l'errore non va considerato come qualcosa di necessariamente negativo, ma poi non si sa come interpretare questa frase.

A noi pare che, nell'accezione qui presentata, si restituisca significato ad una frase che, altrimenti, sembra vuota e sterile.



Lev Semyonovich Vygotskij (1896 – 1934)

Bibliografia

- G. Arrigo, B. D'Amore (1999). *Lo vedo, ma non ci credo*. Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 5, 465-494.
- G. Arrigo, B. D'Amore (2002). *Lo vedo ma non ci credo...*, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, 1, 4-57.
- G. Bachelard (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.
- G.T. Bagni (1997). *Ma un passaggio non è il risultato....* I numeri complessi nella pratica didattica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 187-201.

- G.T. Bagni (1999). Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 4, 353-372.
- G. Brousseau (1983). *Théorisation de phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de Doctorat d'État. Université de Bordeaux I.
- B. Cornu (1983). *Apprentissage de la notion de limite. Conception et obstacle*. Grenoble: IREM.
- A. Douroux (1983). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, 3, 43-67.
- R. Duval (1983). L'obstacle du doublement des objets mathématiques. *Educational studies in mathematics*, 14, 385-414. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1996, 4-32].
- A. Gagatsis, J. Thomaidis (1994). Une étude multidimensionnelle du concept de valeur absolue. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavinot P. (eds.). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage, 343-348.
- A. Gagatsis, J. Thomaidis (1995a). Eine Studie zur historischen Entwicklung und didaktischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag". *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16, 1-2, 3-46.
- A. Gagatsis, J. Thomaidis (1995b). *L'étude historique de la valeur absolue et sa transposition didactique*. In: Actes du Premier Congrès Européen en Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique. Montpellier 1995. 425-429.
- G. Glaeser (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 2, 3, 303-346.
- González Marí J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesi di dottorato. Università di Granada.
- A. Sierpiska (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 6, 1, 5-67.
- S. Spagnolo, C. Margolinas (1993). Un ostacolo epistemologico rilevante per il concetto di limite: il postulato di Archimede. *La matematica e la sua didattica*, 4, 410-427.